QC検定2級　受験前講習会

5.実験計画法

会津オリンパス株式会社
古川　英嗣

実験計画法

実験計画法とは
実験を行い，得られたデータを解析して，要因と特性との関係を明らかにする一連の統計的方法。

登場する統計的手法
- **一元配置法**
- **繰り返し無しの二元配置法**
- **繰り返し有りの二元配置法**
- 多元配置法

（一元配置法～多元配置法）→ 要因配置実験
取り上げた因子と水準のすべてを実施する**総当たり**の実験

- 直交配列実験 ―― 部分配置実験
- 乱塊法
- 分割法　・・・etc

3つ以上の母集団を想定し，**母平均が一様に等しいかどうかの検定**や，**母平均の推定**を行う方法。

要因配置実験の手順
①目的に沿った実験方法を計画し，データを取る。
②要因による効果があるか分散分析により検定する。
③どれくらい効果があるか推定する。

一元配置法

テキストP.259～

一元配置法

部品Yの寸法が，加工機械(**因子**)によって差が無いか検討する。4つの加工機械で，それぞれ5個ずつのデータを取得。

定義

加工機械(因子A)が4種類(水準) ⇒ 因子A 水準i 4
各々5個ずつデータを取得 ⇒ 繰り返し数r 5
※変化する因子が一つ⇒一元配置法

データの形式

因子の水準	データ	Ai水準のデータの和	Ai水準の平均
A1	x_{11} x_{12} x_{13} $\cdots$ x_{1r}	$T_{1\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
A2	x_{21} x_{22} x_{23} $\cdots$ x_{2r}	$T_{2\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$
A3	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A4	x_{l1} x_{l2} x_{l3} $\cdots$ x_{lr}	$T_{l\cdot}$	$\bar{x}_{l\cdot}$
計		T	$\bar{\bar{x}}$

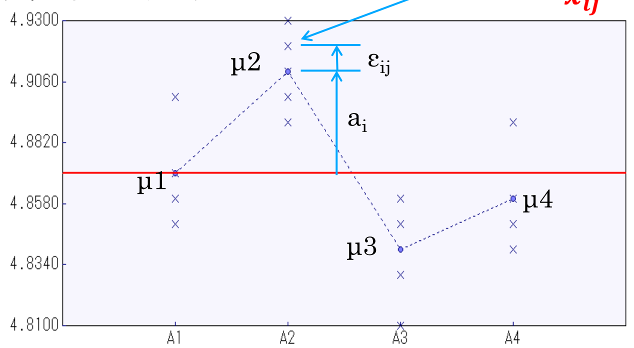
3

一元配置法

グラフ化したデータ

データの構造式

$$x_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$$



総平均:μ

☆同じ水準であっても，ばらつく(誤差)。誤差に対して水準による変化が大きいかどうか判定する(分散分析表)。
☆帰無仮説は「どの水準でも変化が無い」となる。
「Aの効果はない」 ⇔ 「a1=a2=a3=a4」
H0 : μ1 = μ2 = μ3 = μ4
H1 : H0において少なくとも一つは不等号

4

一元配置法

計算方法

☆総平方和　$S_T\,,\varphi_T$

全データのばらつき

☆A間(因子)平方和　$S_A\,,\varphi_A$

因子Aの水準が違うことによるばらつき

☆誤差平方和　$S_E\,,\varphi_E$

同じ水準でのばらつき(実験誤差)

$$CT = \frac{T^2}{N}$$　※計算式の簡単のため(修正項)

$$S_T = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 - CT$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{l} \frac{(A_i\text{水準のデータ和})^2}{A_i\text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{i\cdot}^2}{r} - CT$$

$$S_E = S_T - S_A$$

自由度

$$\varphi_T = \text{総データ数} - 1 = N - 1$$
$$\varphi_A = \text{水準数} - 1 = l - 1$$
$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A$$

5

一元配置法

分散分析表

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	S_A	φ_A	$V_A = S_A/\varphi_A$	V_A/V_E
E	S_E	φ_E	$V_E = S_E/\varphi_E$	
T	S_T	φ_T		

$F_0 = {}^{V_A}/_{V_E}$ の棄却域は,

$F_0 \geq F(\varphi_A\,,\varphi_E\,;\,\alpha)$

実験計画法の問題ではほぼ必ず分散分析表が出題されます。
分散分析表の仕組みは確実に抑えておいたほうがよいです。

6

一元配置法

	データ					計
A1	4.87	4.86	4.90	4.87	4.85	24.35
A2	4.93	4.90	4.89	4.91	4.92	24.55
A3	4.86	4.85	4.85	4.81	4.83	24.20
A4	4.85	4.86	4.84	4.86	4.89	24.30
総計						97.40

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 = 474.3564$$

$$CT = \frac{T^2}{N} = {97.4^2}/{20} = 474.338$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{r} x_{ij}^2 - CT = 474.3564 - 474.338 = 0.0184$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{l} \frac{(A_i\text{水準のﾃﾞｰﾀ和})^2}{A_i\text{水準のﾃﾞｰﾀ数}} - CT$$

$$= \frac{24.35^2}{5} + \frac{24.55^2}{5} + \frac{24.20^2}{5} + \frac{24.30^2}{5} - 474.338 = 0.0130$$

$$S_E = S_T - S_A = 0.0184 - 0.0130 = 0.0054$$

7

一元配置法

<u>自由度</u>

$\varphi_T = \text{総ﾃﾞｰﾀ数} - 1 = N - 1 = 20 - 1 = 19$

$\varphi_A = \text{水準数} - 1 = l - 1 = 4 - 1 = 3$

$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A = 19 - 3 = 16$

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	0.0130	3	$V_A = {S_A}/{\varphi_A} = 0.0043$	${V_A}/{V_E} = 12{,}647$
E	0.0054	16	$V_E = {S_E}/{\varphi_E} = 0.00034$	
T	0.0184	19		

$F_0 = {V_A}/{V_E}$ の棄却域は，$F_0 \geq F(\varphi_A, \varphi_E; \alpha)$

α=0.05 のとき$F(3, 16; 0.05) = 3.24$

α=0.01のとき$F(3, 16; 0.01) = 5.29$

$F_0 = 12{,}647 > F(3, 16; 0.01) = 5.29$より，

因子Aは有意水準0.01で有意である(高度に有意)

⇒因子Aの水準によって母平均が変化している

※有意水準を2パターン見るのは分散分析の慣例

8

一元配置法

点推定

データの構造式： $x_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$

Ai水準の母平均の点推定： $\hat{\mu}(A_i) = \widehat{\mu + a_i} = \bar{x}_{i\cdot}$

A2の場合　$\hat{\mu}(A_2) = \widehat{\mu + a_2} = \bar{x}_{2\cdot} = \frac{24.55}{5} = 4.91$

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_i) \pm t(\varphi_E, \alpha)\sqrt{\frac{V_E}{n_i}}$$

A2の場合

$$\hat{\mu}(A_2) \pm t(\varphi_E, 0.05)\sqrt{\frac{V_E}{n_i}} = 4.91 \pm t(16{,}0.05)\sqrt{\frac{0.00034}{5}} = 4.91 \pm 0.017$$

母平均の差の点推定

$$\hat{\mu}(A_i) - \hat{\mu}(A_k) = \widehat{\mu + a_i} - \widehat{\mu + a_k} = \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{k\cdot}$$

母平均の差の区間推定

$$\hat{\mu}(A_i) - \hat{\mu}(A_k) \pm t(\varphi_E, \alpha)\sqrt{\frac{V_E}{n_i} + \frac{V_E}{n_k}}$$

9

演習問題
[問題15]

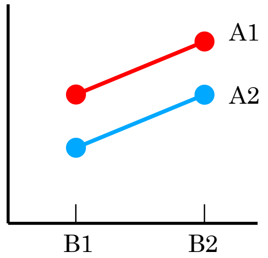
10

二元配置法(繰り返し有り)

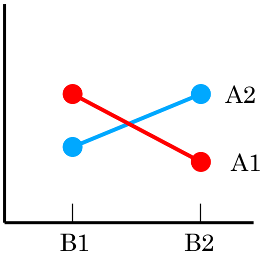
テキストP.274～

・取り扱う因子が2つ(因子A，因子B)
・「因子Aの効果」，「因子Bの効果」に加えて，**「交互作用A×B」**を考える必要がある。

交互作用
ある特定の水準組合せで，傾向が変化すること。



交互作用が**無い**ケース
AとBの主効果は有り



交互作用が**有る**ケース
AとBの主効果は有り

A1,B2水準で傾向が変化

11

二元配置法(繰り返し有り)

二元配置法

部品Yの強度が，材料の種類(**因子A**)，焼成温度**(因子B)**のどの組合せで最も高くなるか検討する。尚，検討にあたり交互作用A×Bが考えられるため，各水準で2回繰り返し実験した。

因子A　水準3
因子B　水準4
繰り返し　2回　　(＝交互作用A×Bを検討)

データの形式

	B1	B2	…	B_j	計 T_{Ai}
A1	x_{111} x_{112}	x_{121} x_{122}	…	x_{1j1} x_{1jk}	$T_{1\cdot\cdot}$
A2	x_{211} x_{212}	x_{221} x_{222}	…	x_{2j1} x_{2jk}	$T_{2\cdot\cdot}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
A_i	x_{i11} x_{i12}	x_{i21} x_{i22}	…	x_{ij1} x_{ijk}	$T_{i\cdot\cdot}$
計 T_{Bj}	$T_{\cdot 1\cdot}$	$T_{\cdot 2\cdot}$	…	$T_{\cdot j\cdot}$	T_{ijk}

12

二元配置法(繰り返し有り)

・データの構造式

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

・帰無仮説

「Aの主効果はない」 ⇔ 「a1=a2=a3」
「Bの主効果はない」 ⇔ 「b1=b2=b3=b4」
「交互作用A×Bはない」 ⇔ 「$(ab)_{11} = (ab)_{12} = \cdots$」

計算方法

☆総平方和　S_T, φ_T
　全データのばらつき
☆各因子の平方和　S_A, φ_A　S_B, φ_B
　因子A, 因子Bの水準が違うことによるばらつき
☆交互作用の平方和　$S_{A\times B}, \varphi_{A\times B}$
　交互作用によるばらつき
☆誤差平方和　S_E, φ_E
　同じ水準でのばらつき(実験誤差)

二元配置法(繰り返し有り)

平方和

$$CT = \frac{T^2}{N}$$

※計算式の簡単のため(修正項)

$$S_T = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}^2 - CT$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{l} \frac{(A_i\text{水準のデータ和})^2}{A_i\text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{i=1}^{l} \frac{T_{i\cdot\cdot}^2}{mr} - CT$$

$$S_B = \sum_{j=1}^{m} \frac{(B_j\text{水準のデータ和})^2}{B_j\text{水準のデータ数}} - CT = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_{\cdot j\cdot}^2}{lr} - CT$$

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \frac{(A_iB_j\text{水準のデータ和})^2}{A_iB_j\text{水準のデータ数}} - CT$$

$$= \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \frac{T_{ij\cdot}^2}{r} - CT$$

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A\times B}$$

自由度

$$\varphi_T = \text{総データ数} - 1 = N - 1$$
$$\varphi_A = \text{Aの水準数} - 1 = l - 1$$
$$\varphi_B = \text{Bの水準数} - 1 = m - 1$$
$$\varphi_{A\times B} = \varphi_A \times \varphi_B$$
$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{A\times B}$$

二元配置法(繰り返し有り)

	B1	B2	B3	B4	計
A1	35.0	34.4	41.2	42.7	306.40
	34.4	34.8	40.5	43.4	
A2	35.9	43.7	45.5	41.2	330.40
	36.4	43.2	44.9	39.6	
A3	36.6	35.4	42.0	40.7	311.20
	37.4	36.2	42.7	40.2	
計	215.7	227.7	256.8	247.8	948.00

$$\sum\sum\sum x_{ijk}^2 = 37750.6$$

補助表

	B1	B2	B3	B4	計
A1	$T_{11\cdot}=69.4$	$T_{12\cdot}=69.2$	$T_{13\cdot}=81.7$	$T_{14\cdot}=86.1$	306.40
A2	$T_{21\cdot}=72.3$	$T_{22\cdot}=86.9$	$T_{23\cdot}=90.4$	$T_{24\cdot}=80.8$	330.40
A3	$T_{31\cdot}=74.0$	$T_{32\cdot}=71.6$	$T_{33\cdot}=84.7$	$T_{34\cdot}=80.9$	311.20
計	215.7	227.7	256.8	247.8	948.00

15

二元配置法(繰り返し有り)

平方和の計算

$$CT = \frac{T^2}{N} = \frac{948.0^2}{3\times4\times2} = 37446.0$$

$$S_T = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}^2 - CT = 37750.6 - CT = 304.60$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{l}\frac{(A_i\text{水準のデ－タ和})^2}{A_i\text{水準のデ－タ数}} - CT = \frac{306.4^2+330.4^2+311.2^2}{8} - CT = 40.32$$

$$S_B = \sum_{j=1}^{m}\frac{\left(B_j\text{水準のデ－タ和}\right)^2}{B_j\text{水準のデ－タ数}} - CT = \frac{215.7^2+227.7^2+256.8^2+247.8^2}{6} - CT$$
$$= 174.81$$

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\frac{\left(A_iB_j\text{水準のデ－タ和}\right)^2}{A_iB_j\text{水準のデ－タ数}} - CT = \frac{T_{11\cdot}^2+T_{12\cdot}^2+\cdots T_{34\cdot}^2}{2} - CT = 301.13$$

$$S_{A\times B} = S_{AB} - S_A - S_B = 301.13 - 40.32 - 174.81 = 86.00$$
$$S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A\times B} = 304.60 - 40.32 - 174.82 - 86.00 = 3.47$$

16

二元配置法(繰り返し有り)

<u>自由度</u>

φ_T = 総データ数 − 1 = 24 − 1 = 23
φ_A = Aの水準数 − 1 = 3 − 1 = 2
φ_B = Bの水準数 − 1 = 4 − 1 = 3
$\varphi_{A\times B} = \varphi_A \times \varphi_B = 2 \times 3 = 6$
$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{A\times B} = 23 - 2 - 3 - 6 = 12$

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	S_A	φ_A	$V_A = S_A/\varphi_A$	V_A/V_E
B	S_B	φ_B	$V_B = S_B/\varphi_B$	V_B/V_E
A×B	$S_{A\times B}$	$\varphi_{A\times B}$	$V_{A\times B} = S_{A\times B}/\varphi_{A\times B}$	$V_{A\times B}/V_E$
E	S_E	φ_E	$V_E = S_E/\varphi_E$	
T	S_T	φ_T		

17

二元配置法(繰り返し有り)

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	40.32	2	20.16	69.52**
B	174.81	3	58.27	200.93**
A×B	86.00	6	14.33	49.41**
E	3.47	12	0.29	
T	304.60	23		

棄却域

$A : F(2,12; 0.05) = 3.89$　　$F(2,12; 0.01) = 6.93$
$B : F(3,12; 0.05) = 3.49$　　$F(3,12; 0.01) = 5.95$
$A \times B : F(6,12; 0.05) = 3.00$　　$F(6,12; 0.01) = 4.82$

因子A,B及び交互作用A×Bのいずれも高度に有意である。

18

二元配置法(繰り返し有り)

点推定 　　一元配置法と同じ

データの構造式： $x_{ij} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

AiBj水準の母平均の点推定： $\hat{\mu}(A_iB_j) = \widehat{\mu + a_i + b_j + (ab)_{ij}} = \bar{x}_{ij\cdot}$

A2B3の場合　$\hat{\mu}(A_2B_3) = \bar{x}_{23\cdot} = \frac{90.4}{2} = 45.20$

⇒μが最も良くなる組合せ(最適水準)

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\varphi_E, \alpha)\sqrt{\frac{V_E}{n_i}}$$

A2B3の場合

$$\hat{\mu}(A_2B_3) \pm t(\varphi_E, 0.05)\sqrt{\frac{V_E}{n_i}} = 45.20 \pm t(12, 0.05)\sqrt{\frac{0.29}{2}} = 45.20 \pm 0.83$$

19

二元配置法(繰り返し有り)　～交互作用が有意とならない場合～

テキストP.280

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	917.6	2	254.8	19.38**
B	261.0	2	130.5	9.92**
A×B	46.1	4	11.53	0.877
E	236.7	18	13.15	
T	1461.4	26		

プーリング

有意とならなかった因子を誤差の一部とみなし，誤差Eに加えて再計算する

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F_0
A	917.6	2	254.8	19.83**
B	261.0	2	130.5	10.16**
E'	282.8	22	12.85	
T	1461.4	26		

20

二元配置法(繰り返し有り)
～交互作用が有意とならない場合～

点推定

データの構造式: $x_{ij} = \mu + a_i + b_j + \cancel{(ab)_{ij}} + \varepsilon_{ijk}$
$= \mu + a_i + b_j + \varepsilon'_{ijk}$

AiBj水準の母平均の点推定: $\hat{\mu}(A_iB_j) = \mu + \widehat{a_i + b_j} = \widehat{\mu + a_i} + \widehat{\mu + b_j} - \hat{\mu}$
$= \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}$

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\varphi_{E'}, \alpha)\sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}}$$

母集団の点推定に用いたデータの個数。プーリングして構造式が変更されている為，それを考慮した数値を算出する必要がある(**有効反復数**)

①田口の式

$$n_e = \frac{総実験数}{(無視しない要因の自由度の総和) + 1} = \frac{lmr}{\varphi_1 + \varphi_2 + 1}$$

②伊奈の式

$$\frac{1}{n_e} = (母平均の推定式における合計にかかっている係数の和)$$
$$= \frac{1}{mr} + \frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr}$$

21

二元配置法(繰り返し無し)

・繰り返し無しとは
各水準組合せで，1回ずつ実験する場合。
(データ数＝因子Aの水準数×因子Bの水準数)

・特徴
交互作用が出てこない(計算できない)。
算出する平方和は，因子A,B及び誤差Eのみ。
交互作用をプーリングした場合の計算方法と同じ(ただし繰り返し数「1」)。

・データの構造式

$$\boldsymbol{x_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}}$$

・平方和の計算

$$\boldsymbol{S_E = S_T - S_A - S_B}$$

・推定式

$$\hat{\mu}(A_iB_j) = \mu + \widehat{a_i + b_j} = \widehat{\mu + a_i} + \widehat{\mu + b_j} - \hat{\mu} = \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}$$

$$\hat{\mu}(A_iB_j) \pm t(\varphi_{E'}, \alpha)\sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}}$$

22

まとめ

・要因配置実験とは，実験計画法の一種で3つ以上の母集団を想定し，**母平均が一様に等しいかどうかの検定**や，**母平均の推定**を行う方法。

・実験の条件(因子数、繰り返し有無)によって手法が異なる。

一元配置法：1因子，i水準，繰り返しr
二元配置法(繰り返し有り)：2因子，i水準，繰り返しr
二元配置法(繰り返し無し)：2因子，i水準

・分散分析表によるF検定が用いられる。

⇒分散分析表の読み方
⇒平方和の算出方法
⇒自由度の算出方法

23

演習問題
[問題16,17,18]

24