

5.実験計画法

会津オリンパス株式会社
古川 英嗣

このテキストには著作権があり、許可無く資料のコピー・掲載はできません。
また、セミナーの録音もこれに該当し、録音できません。

実験計画法

実験計画法とは

実験を行い、得られたデータを解析して、要因と特性との関係を明らかにする一連の統計的方法。

登場する統計的手法

- ・一元配置法
- ・繰り返し無しの二元配置法
- ・繰り返し有りの二元配置法
- ・多元配置法

要因配置実験

取り上げた因子と水準のすべてを実施する
総当たりの実験

- ・直交配列実験 — 部分配置実験
- ・乱塊法
- ・分割法 …etc

3つ以上の母集団を想定し、**母平均が一樣に等しいかどうかの検定**や、**母平均の推定**を行う方法。

要因配置実験の手順

- ①目的に沿った実験方法を計画し、データを取る。
- ②要因による効果があるか分散分析により検定する。
- ③どれくらい効果があるか推定する。

一元配置法

テキストP.259～

一元配置法

部品Yの寸法が、加工機械(因子)によって差が無いか検討する。4つの加工機械で、それぞれ5個ずつのデータを取得。

定義

加工機械(因子A)が4種類(水準) ⇒ 因子A 水準i 4
各々5個ずつデータを取得 ⇒ 繰返し数r 5
※変化する因子が一つ⇒一元配置法

データの形式

因子の水準	データ	Ai水準のデータの和	Ai水準の平均
A1	$x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ \cdots \ x_{1r}$	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
A2	$x_{21} \ x_{22} \ x_{23} \ \cdots \ x_{2r}$	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
A3	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A4	$x_{l1} \ x_{l2} \ x_{l3} \ \cdots \ x_{lr}$	$T_{l.}$	$\bar{x}_{l.}$
計		T	$\bar{\bar{x}}$

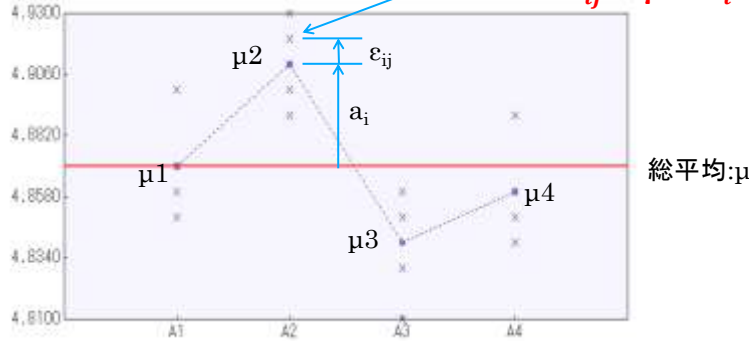
3

一元配置法

データの構造式

グラフ化したデータ

$x_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$



☆同じ水準であっても、ばらつく(誤差)。誤差に対して水準による変化が大きいかどうか判定する(分散分析表)。
☆帰無仮説は「どの水準でも変化が無い」となる。
「Aの効果はない」 ⇔ 「 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 」
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
 $H_1 : H_0$ において少なくとも一つは不等号

4

一元配置法

計算方法

☆総平方和 S_T, φ_T

全データのばらつき

☆A間(因子)平方和 S_A, φ_A

因子Aの水準が違うことによるばらつき

☆誤差平方和 S_E, φ_E

同じ水準でのばらつき(実験誤差)

$$CT = \frac{T^2}{N} \quad \text{※計算式の簡単のため(修正項)}$$

$$S_T = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r x_{ij}^2 - CT$$

自由度

$$\varphi_T = \text{総データ数} - 1 = N - 1$$

$$\varphi_A = \text{水準数} - 1 = l - 1$$

$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A$$

$$S_A = \sum_{i=1}^l \frac{(A_i \text{水準のデータ之和})^2}{A_i \text{水準のデータ数}} - CT$$

$$= \sum_{i=1}^l \frac{T_{i.}^2}{r} - CT$$

$$S_E = S_T - S_A$$

5

一元配置法

分散分析表

★要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比 F_0
A	S_A	φ_A	$V_A = S_A / \varphi_A$	V_A / V_E
E	S_E	φ_E	$V_E = S_E / \varphi_E$	
T	S_T	φ_T		

$F_0 = V_A / V_E$ の棄却域は,

$$F_0 \geq F(\varphi_A, \varphi_E; \alpha)$$

実験計画法の問題ではほぼ必ず分散分析表が出題されます。
分散分析表の仕組みは確実に抑えておいたほうがよいです。

6

一元配置法

	データ					計
A1	4.87	4.86	4.90	4.87	4.85	24.35
A2	4.93	4.90	4.89	4.91	4.92	24.55
A3	4.86	4.85	4.85	4.81	4.83	24.20
A4	4.85	4.86	4.84	4.86	4.89	24.30
総計						97.40

$$\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r x_{ij}^2 = 474.3564$$

$$CT = \frac{T^2}{N} = 97.4^2 / 20 = 474.338$$
$$S_T = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r x_{ij}^2 - CT = 474.3564 - 474.338 = 0.0184$$
$$S_A = \sum_{i=1}^l \frac{(A_i \text{水準のデータ和})^2}{A_i \text{水準のデータ数}} - CT$$
$$= \frac{24.35^2}{5} + \frac{24.55^2}{5} + \frac{24.20^2}{5} + \frac{24.30^2}{5} - 474.338 = 0.0130$$
$$S_E = S_T - S_A = 0.0184 - 0.0130 = 0.0054$$

7

一元配置法

自由度

$$\varphi_T = \text{総データ数} - 1 = N - 1 = 20 - 1 = 19$$
$$\varphi_A = \text{水準数} - 1 = l - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A = 19 - 3 = 16$$

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比F ₀
A	0.0130	3	$V_A = S_A / \varphi_A = 0.0043$	$V_A / V_E = 12.647$
E	0.0054	16	$V_E = S_E / \varphi_E = 0.00034$	
T	0.0184	19		

$F_0 = V_A / V_E$ の棄却域は, $F_0 \geq F(\varphi_A, \varphi_E; \alpha)$

$\alpha=0.05$ のとき $F(3, 16; 0.05) = 3.24$ ※2パターンの有意水準を
 $\alpha=0.01$ のとき $F(3, 16; 0.01) = 5.29$ 見るのは分散分析の慣例

$F_0 = 12.647 > F(3, 16; 0.01) = 5.29$ より,
因子Aは有意水準0.01で有意である(高度に有意)
⇒因子Aの水準によって母平均が変化している

8

一元配置法

点推定

データの構造式: $x_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij}$

Ai水準の母平均の点推定: $\hat{\mu}(A_i) = \widehat{\mu + a_i} = \bar{x}_i.$

A2の場合 $\hat{\mu}(A_2) = \widehat{\mu + a_2} = \bar{x}_2. = \frac{24.55}{5} = 4.91$

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_i) \pm t(\varphi_E, \alpha) \sqrt{\frac{V_E}{n_i}}$$

A2の場合

$$\hat{\mu}(A_2) \pm t(\varphi_E, 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n_i}} = 4.91 \pm t(16, 0.05) \sqrt{\frac{0.00034}{5}} = 4.91 \pm 0.017$$

母平均の差の点推定

$$\hat{\mu}(A_i) - \hat{\mu}(A_k) = \widehat{\mu + a_i} - \widehat{\mu + a_k} = \bar{x}_i. - \bar{x}_k.$$

母平均の差の区間推定

$$\hat{\mu}(A_i) - \hat{\mu}(A_k) \pm t(\varphi_E, \alpha) \sqrt{\frac{V_E}{n_i} + \frac{V_E}{n_k}}$$

9

演習問題 [問題15]

10

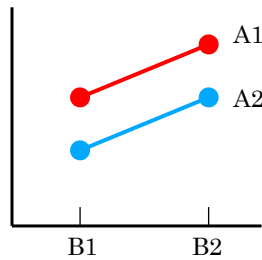
二元配置法(繰返し有り)

テキストP.274～

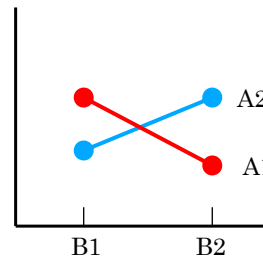
- ・取り扱う因子が2つ(因子A, 因子B)
- ・「因子Aの効果」, 「因子Bの効果」に加えて, 「交互作用A×B」を考える必要がある。

交互作用

ある特定の水準組合せで, 傾向が変化すること。



交互作用が無いケース
AとBの主効果は有り



交互作用が有るケース
AとBの主効果は有り

A1,B2水準で
傾向が変化

11

二元配置法(繰返し有り)

二元配置法

部品Yの強度が, 材料の種類(因子A), 焼成温度(因子B)のどの組合せで最も高くなるか検討する。尚, 検討にあたり交互作用A×Bが考えられるため, 各水準で2回繰返し実験した。

因子A 水準3

因子B 水準4

繰返し 2回 (=交互作用A×Bを検討)

データの形式

	B1	B2	...	B_j	計 T_{Ai}
A1	x_{111} x_{112}	x_{121} x_{122}	...	x_{1j1} x_{1jk}	$T_{1..}$
A2	x_{211} x_{212}	x_{221} x_{222}	...	x_{2j1} x_{2jk}	$T_{2..}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
A_i	x_{i11} x_{i12}	x_{i21} x_{i22}	...	x_{ij1} x_{ijk}	$T_{i..}$
計 T_{Bj}	$T_{.1.}$	$T_{.2.}$	...	$T_{.j.}$	T_{ijk}

12

二元配置法(繰返し有り)

・データの構造式

$$x_{ijk} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

・帰無仮説

「Aの主効果はない」 $\Leftrightarrow$ 「 $a_1=a_2=a_3$ 」

「Bの主効果はない」 $\Leftrightarrow$ 「 $b_1=b_2=b_3=b_4$ 」

「交互作用A $\times$ Bはない」 $\Leftrightarrow$ 「 $(ab)_{11}=(ab)_{12}=\dots$ 」

計算方法

☆総平方和 S_T, φ_T

全データのばらつき

☆各因子の平方和 S_A, φ_A S_B, φ_B

因子A, 因子Bの水準が違ふことによるばらつき

☆交互作用の平方和 $S_{A \times B}, \varphi_{A \times B}$

交互作用によるばらつき

☆誤差平方和 S_E, φ_E

同じ水準でのばらつき(実験誤差)

13

二元配置法(繰返し有り)

平方和

$$CT = \frac{T^2}{N} \quad \text{※計算式の簡単のため(修正項)}$$

自由度

$$S_T = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r x_{ijk}^2 - CT$$

$$\varphi_T = \text{総}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{数} - 1 = N - 1$$

$$\varphi_A = A\text{の水準数} - 1 = l - 1$$

$$\varphi_B = B\text{の水準数} - 1 = m - 1$$

$$\varphi_{A \times B} = \varphi_A \times \varphi_B$$

$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{A \times B}$$

$$S_A = \sum_{i=1}^l \frac{(A_i \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{和})^2}{A_i \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{数}} - CT = \sum_{i=1}^l \frac{T_{i..}^2}{mr} - CT$$

$$S_B = \sum_{j=1}^m \frac{(B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{和})^2}{B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{数}} - CT = \sum_{j=1}^m \frac{T_{.j}^2}{lr} - CT$$

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{(A_i B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{和})^2}{A_i B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\tau\text{数}} - CT$$

$$= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{T_{ij.}^2}{r} - CT$$

$$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A \times B}$$

14

二元配置法(繰返し有り)

	B1	B2	B3	B4	計
A1	35.0	34.4	41.2	42.7	306.40
	34.4	34.8	40.5	43.4	
A2	35.9	43.7	45.5	41.2	330.40
	36.4	43.2	44.9	39.6	
A3	36.6	35.4	42.0	40.7	311.20
	37.4	36.2	42.7	40.2	
計	215.7	227.7	256.8	247.8	948.00

$$\sum \sum \sum x_{ijk}^2 = 37750.6$$

補助表

	B1	B2	B3	B4	計
A1	$T_{11} \cdot = 69.4$	$T_{12} \cdot = 69.2$	$T_{13} \cdot = 81.7$	$T_{14} \cdot = 86.1$	306.40
A2	$T_{21} \cdot = 72.3$	$T_{22} \cdot = 86.9$	$T_{23} \cdot = 90.4$	$T_{24} \cdot = 80.8$	330.40
A3	$T_{31} \cdot = 74.0$	$T_{32} \cdot = 71.6$	$T_{33} \cdot = 84.7$	$T_{34} \cdot = 80.9$	311.20
計	215.7	227.7	256.8	247.8	948.00

15

二元配置法(繰返し有り)

平方和の計算

$$CT = \frac{T^2}{N} = \frac{948.0^2}{3 \times 4 \times 2} = 37446.0$$

$$S_T = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^r x_{ijk}^2 - CT = 37750.6 - CT = 304.60$$

$$S_A = \sum_{i=1}^l \frac{(A_i \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々和})^2}{A_i \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々数}} - CT = \frac{306.4^2 + 330.4^2 + 311.2^2}{8} - CT = 40.32$$

$$S_B = \sum_{j=1}^m \frac{(B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々和})^2}{B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々数}} - CT = \frac{215.7^2 + 227.7^2 + 256.8^2 + 247.8^2}{6} - CT = 174.81$$

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \frac{(A_i B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々和})^2}{A_i B_j \text{水準の}\bar{\tau}\text{-}\text{々数}} - CT = \frac{T_{11}^2 + T_{12}^2 + \dots + T_{34}^2}{2} - CT = 301.13$$

$$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B = 301.13 - 40.32 - 174.81 = 86.00$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A \times B} = 304.60 - 40.32 - 174.82 - 86.00 = 3.47$$

16

二元配置法(繰返し有り)

自由度

$$\varphi_T = \text{総データ数} - 1 = 24 - 1 = 23$$

$$\varphi_A = A \text{ の水準数} - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\varphi_B = B \text{ の水準数} - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\varphi_{A \times B} = \varphi_A \times \varphi_B = 2 \times 3 = 6$$

$$\varphi_E = \varphi_T - \varphi_A - \varphi_B - \varphi_{A \times B} = 23 - 2 - 3 - 6 = 12$$

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比 F_0
A	S_A	φ_A	$V_A = S_A / \varphi_A$	V_A / V_E
B	S_B	φ_B	$V_B = S_B / \varphi_B$	V_B / V_E
A×B	$S_{A \times B}$	$\varphi_{A \times B}$	$V_{A \times B} = S_{A \times B} / \varphi_{A \times B}$	$V_{A \times B} / V_E$
E	S_E	φ_E	$V_E = S_E / \varphi_E$	
T	S_T	φ_T		

17

二元配置法(繰返し有り)

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比 F_0
A	40.32	2	20.16	69.52**
B	174.81	3	58.27	200.93**
A×B	86.00	6	14.33	49.41**
E	3.47	12	0.29	
T	304.60	23		

棄却域

$$A : F(2, 12; 0.05) = 3.89 \quad F(2, 12; 0.01) = 6.93$$

$$B : F(3, 12; 0.05) = 3.49 \quad F(3, 12; 0.01) = 5.95$$

$$A \times B : F(6, 12; 0.05) = 3.00 \quad F(6, 12; 0.01) = 4.82$$

因子A,B及び交互作用A×Bのいずれも高度に有意である。

18

二元配置法(繰返し有り)

点推定

一元配置法と同じ

データの構造式: $x_{ij} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

AiBj水準の母平均の点推定: $\hat{\mu}(A_i B_j) = \mu + a_i + \widehat{b_j} + (ab)_{ij} = \bar{x}_{ij}$.

A2B3の場合 $\hat{\mu}(A_2 B_3) = \bar{x}_{23} = \frac{90.4}{2} = 45.20$

$\Rightarrow \mu$ が最も良くなる組合せ(最適水準)

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_i B_j) \pm t(\varphi_E, \alpha) \sqrt{\frac{V_E}{n_i}}$$

A2B3の場合

$$\hat{\mu}(A_2 B_3) \pm t(\varphi_E, 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{n_i}} = 45.20 \pm t(12, 0.05) \sqrt{\frac{0.29}{2}} = 45.20 \pm 0.83$$

19

二元配置法(繰返し有り)

テキストP.280

～交互作用が有意とならない場合～

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比 F_0
A	917.6	2	254.8	19.38**
B	261.0	2	130.5	9.92**
A×B	46.1	4	11.53	0.877
E	236.7	18	13.15	
T	1461.4	26		

プーリング

有意とならなかった因子を誤差の一部とみなし、誤差Eに加えて再計算する

要因	平方和	自由度	平均平方(分散)	分散比 F_0
A	917.6	2	254.8	19.83**
B	261.0	2	130.5	10.16**
E'	282.8	22	12.85	
T	1461.4	26		

20

二元配置法(繰り返し有り) ～交互作用が有意とならない場合～

点推定

$$\begin{aligned}\text{データの構造式: } x_{ij} &= \mu + a_i + b_j + \cancel{(ab)_{ij}} + \varepsilon_{ijk} \\ &= \mu + a_i + b_j + \varepsilon'_{ijk}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{AiBj水準の母平均の点推定: } \hat{\mu}(A_i B_j) &= \mu + \widehat{a_i} + b_j = \widehat{\mu + a_i} + \widehat{\mu} + b_j - \hat{\mu} \\ &= \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}\end{aligned}$$

区間推定(95%信頼区間)

$$\hat{\mu}(A_i B_j) \pm t(\varphi_{E'}, \alpha) \sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}}$$

母集団の点推定に用いたデータの個数。プーリングして構造式が変更されている為、それを考慮した数値を算出する必要がある(**有効反復数**)

①田口のルール

$$n_e = \frac{\text{総実験数}}{(\text{無視しない要因の自由度の総和}) + 1} = \frac{lmr}{\varphi_1 + \varphi_2 + 1}$$

②伊奈のルール

$$\begin{aligned}\frac{1}{n_e} &= (\text{母平均の推定式における合計にかかっている係数の和}) \\ &= \frac{1}{mr} + \frac{1}{lr} - \frac{1}{lmr}\end{aligned}$$

21

二元配置法(繰り返し無し)

・繰り返し無しとは

各水準組合せで、1回ずつ実験する場合。
(データ数＝因子Aの水準数×因子Bの水準数)

・特徴

交互作用が出てこない(計算できない)。

算出する平方和は、因子A,B及び誤差Eのみ。

交互作用をプーリングした場合の計算方法と同じ(ただし繰り返し数「1」)。

・データの構造式

$$x_{ij} = \mu + a_i + b_j + \varepsilon_{ij}$$

・平方和の計算

$$S_E = S_T - S_A - S_B$$

・推定式

$$\hat{\mu}(A_i B_j) = \mu + \widehat{a_i} + b_j = \widehat{\mu + a_i} + \widehat{\mu} + b_j - \hat{\mu} = \bar{x}_{i..} + \bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}$$

$$\hat{\mu}(A_i B_j) \pm t(\varphi_{E'}, \alpha) \sqrt{\frac{V_{E'}}{n_e}}$$

22

まとめ

- ・要因配置実験とは、実験計画法の一つで3つ以上の母集団を想定し、**母平均が一樣に等しいかどうかの検定**や、**母平均の推定**を行う方法。
- ・実験の条件(因子数、繰り返し有無)によって手法が異なる。
 - 一元配置法: 1因子, i 水準, 繰り返し r
 - 二元配置法(繰り返し有り): 2因子, i 水準, 繰り返し r
 - 二元配置法(繰り返し無し): 2因子, i 水準
- ・分散分析表によるF検定が用いられる。
 - ⇒分散分析表の読み方
 - ⇒平方和の算出方法
 - ⇒自由度の算出方法

23

演習問題

[問題16,17,18]

24